Dopolnjevanje latinskih kvadratov

Ana Mušič

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

17. april 2009

Latinski kvadrati

Latinski kvadrati so sestavljeni iz n^2 celic matrike $n \times n$ in števili $1, 2, ..., n$ tako, da vsaka številka nastopi natanko enkrat v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu.

Latinski kvadrati

Latinski kvadrati so sestavljeni iz n^2 celic matrike $n \times n$ in števili $1, 2, ..., n$ tako, da vsaka številka nastopi natanko enkrat v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu.

Primer:

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

Latinski kvadrati

Latinski kvadrati so sestavljeni iz n^2 celic matrike $n \times n$ in števili $1, 2, ..., n$ tako, da vsaka številka nastopi natanko enkrat v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu.

Primer:

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

Definicija

Če so nekatere celice matrike $n \times n$ zapolnjene s števili iz množice $1, 2, ...n$ tako, da se vsaka številka pojavi najvec enkrat v vsaki vrstici in stolpcu, govorimo o ***delnem latinskem kvadratu****.*

Latinski kvadrati

Latinski kvadrati so sestavljeni iz n^2 celic matrike $n \times n$ in števili $1, 2, ..., n$ tako, da vsaka številka nastopi natanko enkrat v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu.

Primer:

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

Definicija

*Če so nekatere celice matrike $n \times n$ zapolnjene s števili iz množice $1, 2, ...n$ tako, da se vsaka številka pojavi najvec enkrat v vsaki vrstici in stolpcu, govorimo o **delnem latinskem kvadratu**.*

Problem

*Kdaj lahko delni latinski kvadrat dopolnimo do **popolnega latinskega kvadrata**?*

Lema 1

Lema

Katerikoli latinski pravokotnik $r \times n$, $r < n$, lahko dopolnimo do $(r+1) \times n$ latinskega pravokotnika in je zato lahko dopolnjen do latinskega kvadrata.

Lema 1

Lema

Katerikoli latinski pravokotnik $r \times n$, $r < n$, lahko dopolnimo do $(r+1) \times n$ latinskega pravokotnika in je zato lahko dopolnjen do latinskega kvadrata.

Definicija

Naj bo X končna množica in $A_1, ..., A_n$ njene podmnožice (ne nujno različne). Zaporedju $x_1, ..., x_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) množic $A_1, ..., A_n$, če $x_i \in A_i$ in so x_i parma različni elementi ($i \in \{1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$)

Lema 1

Lema

Katerikoli latinski pravokotnik $r \times n$, $r < n$, lahko dopolnimo do $(r+1) \times n$ latinskega pravokotnika in je zato lahko dopolnjen do latinskega kvadrata.

Definicija

Naj bo X končna množica in $A_1, ..., A_n$ njene podmnožice (ne nujno različne). Zaporedju $x_1, ..., x_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) množic $A_1, ..., A_n$, če $x_i \in A_i$ in so x_i parma različni elementi ($i \in \{1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$)

Izrek

Hallov izrek: *Naj bodo $A_1, ..., A_n$ neprazne podmnožice končne množice X. Zaporedje SRP obstaja natanko tedaj, ko vsaka unija katerihkoli m množic vsebuje vsaj m elementov.*

Dokaz

Uporabimo Hall-ov izrek.

- *Naj bo A_j množica števil, ki se ne pojavijo v stoplcu j.*

Dokaz

Uporabimo Hall-ov izrek.

- *Naj bo A_j množica števil, ki se ne pojavijo v stoplcu j. $(r+1)$-va vrstica ustreza natanko sistemu različnih predstavnikov za nize $A_1, ..., A_n$.*

Dokaz

Uporabimo Hall-ov izrek.

- *Naj bo A_j množica števil, ki se ne pojavijo v stoplcu j. $(r+1)$-va vrstica ustreza natanko sistemu različnih predstavnikov za nize $A_1, ..., A_n$.*
- *Za dokaz leme moramo torej preveriti Hall-ov pogoj (H). Vsak niz A_j ima dolžino $n-r$ in vsak element je v natančno $n-r$ množicah A_j (ker se pojavi r-krat v pravokotniku). Katerihkoli m od množic A_j vsebuje skupaj $m(n-r)$ elementov in ima zato najmanj m različnih elementov, kar je ravno pogoj (H).*

□

Lema 2

Lema

Naj bo P delni Latinski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami in z največ $\frac{n}{2}$ različnimi elementi.
Potem lahko P dopolnimo do latinskega kvadrata reda n.

Lema 2

Lema

Naj bo P delni Latinski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami in z največ $\frac{n}{2}$ različnimi elementi.
Potem lahko P dopolnimo do latinskega kvadrata reda n.

Dokaz

1. $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$, *kjer je* $r \leq \frac{n}{2}$

Lema 2

Lema

Naj bo P delni Latinski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami in z največ $\frac{n}{2}$ različnimi elementi.
Potem lahko P dopolnimo do latinskega kvadrata reda n.

Dokaz

1. $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$, *kjer je* $r \leq \frac{n}{2}$
2. *Naj bo X množica elementov, ki se ne pojavijo v vrstici l, torej je $|X| = n - f_l$ in za $j = 1, 2, ..., n - f_l$ naj bo A_j množica tistih elementov v X, ki se ne pojavijo v stolpcu j.*

Lema 2

Lema

Naj bo P delni Latinski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami in z največ $\frac{n}{2}$ različnimi elementi.
Potem lahko P dopolnimo do latinskega kvadrata reda n.

Dokaz

1. $\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1$, *kjer je* $r \leq \frac{n}{2}$
2. *Naj bo X množica elementov, ki se ne pojavijo v vrstici l, torej je $|X| = n - f_l$ in za $j = 1, 2, ..., n - f_l$ naj bo A_j množica tistih elementov v X, ki se ne pojavijo v stolpcu j.*

Najprej trdimo:

$$n - f_l - l + 1 > l - 1 + f_{l+1} + ... + f_r \tag{1}$$

Dokaz

Vzemimo sedaj m množic A_j, $1 \leq m \leq n - f_l$, in naj bo B njihova unija. Pokazati moramo: $|B| \geq m$.

Dokaz

Vzemimo sedaj m množic A_j, $1 \leq m \leq n - f_l$, in naj bo B njihova unija. Pokazati moramo: $|B| \geq m$.
Naj bo c število celic v m stolpcih, ki ustrezajo množicam A_j, katere vsebujejo elemente X.

Dokaz

Vzemimo sedaj m množic A_j, $1 \leq m \leq n - f_l$, in naj bo B njihova unija. Pokazati moramo: $|B| \geq m$.
Naj bo c število celic v m stolpcih, ki ustrezajo množicam A_j, katere vsebujejo elemente X.

$$m \cdot (|X| - |B|) \leq c \leq (l-1) \cdot m + r - l$$

Dokaz

Vzemimo sedaj m množic A_j, $1 \leq m \leq n - f_l$, in naj bo B njihova unija. Pokazati moramo: $|B| \geq m$.
Naj bo c število celic v m stolpcih, ki ustrezajo množicam A_j, katere vsebujejo elemente X.

$$m \cdot (|X| - |B|) \leq c \leq (l-1) \cdot m + r - l$$

S preoblikovanjem enačb dobimo:

$$m \cdot (n - f_l - l + 2 - m) > f_{l+1} + \ldots + f_r$$

Dokaz

Vzemimo sedaj m množic A_j, $1 \leq m \leq n - f_l$, in naj bo B njihova unija. Pokazati moramo: $|B| \geq m$.
Naj bo c število celic v m stolpcih, ki ustrezajo množicam A_j, katere vsebujejo elemente X.

$$m \cdot (|X| - |B|) \leq c \leq (l-1) \cdot m + r - l$$

S preoblikovanjem enačb dobimo:

$$m \cdot (n - f_l - l + 2 - m) > f_{l+1} + \ldots + f_r = r - l \qquad (2)$$

Dokaz

Vzemimo sedaj m množic A_j, $1 \leq m \leq n - f_l$, in naj bo B njihova unija. Pokazati moramo: $|B| \geq m$.
Naj bo c število celic v m stolpcih, ki ustrezajo množicam A_j, katere vsebujejo elemente X.

$$m \cdot (|X| - |B|) \leq c \leq (l-1) \cdot m + r - l$$

S preoblikovanjem enačb dobimo:

$$m \cdot (n - f_l - l + 2 - m) > f_{l+1} + \ldots + f_r = r - l \qquad (2)$$

Torej: $|B| = n - f_l \geq m$

□

Smetaniukov izrek

Izrek

Delni Latnski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami lahko dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda.

Smetaniukov izrek

Izrek

Delni Latnski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami lahko dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda.

Dokaz

Dokazujemo z indukcijo na n:

1. korak:

- *Vse elemente premaknemo nad stransko diagonalo, razen element $(n+1)$ premaknemo na diagonalo.*

Smetaniukov izrek

Izrek

Delni Latnski kvadrat reda n z največ $n-1$ zapolnjenimi celicami lahko dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda.

Dokaz

Dokazujemo z indukcijo na n:

1. korak:

- *Vse elemente premaknemo nad stransko diagonalo, razen element $(n+1)$ premaknemo na diagonalo.*
- *Premaknemo vrstico s_i na mesto $n+1-f_1-f_2-\ldots-f_i$ in zapolnjene celice na levo, kolikor je mogoče.*

Primer

	2			7		
		4		5		
			5			
..	4	..	..	..	..	..

Primer

	2			7		
		4		5		
			5			
..	4	..	..	..	..	..

4						*
			5		*	
	5	4		*		
			*			
		*				
2	7					
*	..	..	..	..	..	..

Dokaz

2. korak:GLAVNA IDEJA

- *Izbrišemo element $(n + 1)$ ter zadnjo vrstico in stolpec.*

Dokaz

2. korak:GLAVNA IDEJA

- *Izbrišemo element $(n + 1)$ ter zadnjo vrstico in stolpec.*
- *Delni latinski kvadrat reda n dopolnimo do popolnega latinskega kvadrata istega reda.*

Dokaz

2. korak:GLAVNA IDEJA

- *Izbrišemo element $(n + 1)$ ter zadnjo vrstico in stolpec.*
- *Delni latinski kvadrat reda n dopolnimo do popolnega latinskega kvadrata istega reda.*

Primer

4	1	2	6	3	5
3	6	1	5	4	2
1	5	4	3	2	6
5	3	6	2	1	4
6	2	3	4	5	1
2	4	5	1	6	3

Primer

4	1	2	6	3	5	7
3	6	1	5	4	7	2
1	5	4	3	7	2	6
5	3	6	7	2	4	1
6	2	7	4	5	1	3
2	7	5	1	6	3	4
7	4	3	2	1	6	5